Γάμμα κατανομή

$X =$ χρόνος μέχρι την α άφιξη $(\alpha \in \mathbb{N})$

$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$f_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ με $x>0$ και $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ με

$m_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$E(X) = \alpha\beta$, $Var(X) = \alpha\beta^2$

Κανονική Κατανομή:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ κ $Y = \sum_1^n \alpha_i X_i$

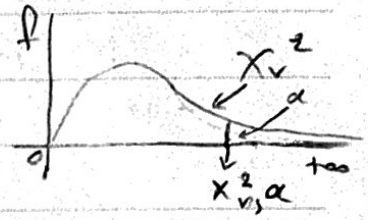
$Y \sim N(\sum_1^n \alpha_i \mu_i, \sum_1^n \alpha_v^2 \sigma_i^2)$

χ_v^2 - Χι τετράγωνο με v βαθμούς ελευθερίας

$Z_1, \dots, Z_v$ ανεξάρτ. και ισόνομες $N(0,1)$ τ.μ.

$X = \sum_{i=1}^{v} Z_i^2 \sim \chi_v^2 \equiv Gamma(\alpha = \frac{v}{2}, \beta = 2)$

$m_X(t) = (1-2t)^{-\frac{v}{2}}$, $E(\chi_v^2) = v$, $Var(\chi_v^2) = 2v$



$P(\chi_v^2 \geq \chi^2_{\alpha,v}) = \alpha$

Πχ

$X_1 \sim \chi_3^2$ κ $X_2 \sim \chi_5^2$

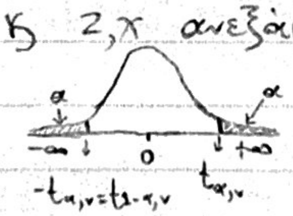
X_1, X_2 ανεξάρτητες τ.μ.

$$\left.\begin{array}{l} X = X_1 + X_2 \\ X_1 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \\ X_2 = Z_1^2 + \dots + Z_5^2 \end{array}\right\} \to X = Z_1^2 + \dots + Z_8^2 \sim \chi_8^2$$

t_v - τι με v β. ε. (Student t)

Αν $Z \sim N(0,1)$ τ.μ. κ $X \sim \chi_v^2$ κ Z, X ανεξάρτητες τ.μ.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{v}}} \sim t_v = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_v^2}{v}}}$$

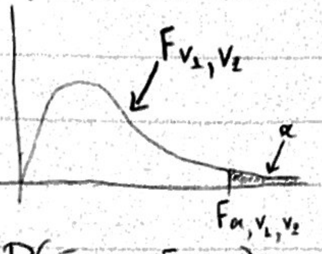


$E(t_v) = 0$

F_{v_1,v_2} - Εφ με v_1 κ v_2 βαθμούς ελευθερίας

$X_1 \sim \chi^2_{v_1}$ κ $X_2 \sim \chi^2_{v_2}$ κ X_1, X_2 ανεξάρτητες μεταβλητές

$F = \frac{\frac{X_1}{v_1}}{\frac{X_2}{v_2}}$ $\quad t_v^2 = F_{1,v}$ κ $F_{\alpha,v_1,v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha,v_2,v_1}}$



$P(F_{v_1,v_2} \geq F_{\alpha,v_1,v_2}) = \alpha$

Δειγματοληψία από κανονική κατανομή

1) Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ τότε,

(i) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, (ii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$, (iii) $\bar{X}$ κ S^2 ανεξάρτ. τ.μ.

Απόδειξη

(i) $m_{X_i}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \Rightarrow m_{\sum\limits_{i=1}^{n}}(t) = m_{X_1}(t) \cdot \cdot m_{X_n}(t) = e^{n\mu t + n\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$m_{\bar{X}}(t) = m_{\sum\limits_{i=1}^{n}}(t) = m_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(\frac{t}{n}) = e^{n\mu \frac{t}{n} + n\frac{1}{2}\sigma^2 (\frac{t}{n})^2} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}$ δηλ. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

(ii) $\frac{(n-1)^2}{\sigma^2} \sim$; $\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right]$

$$\text{Δηλ. } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$X = Y - Z$$

(Άσκηση 2.3 (ii) κ (iv))

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_\nu$

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim X^2_1$

$Y = X + Z$

$m_Y(t) = m_X(t) \cdot m_Z(t) \Rightarrow m_X(t) = \frac{m_Y(t)}{m_Z(t)} = \frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow m_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n-1}{2}}$

δηλ. $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$

2) Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ τότε $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \sim t_{n-1} \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

3) Έστω $(\bar{X}_1, S_1^2)$ κ $(\bar{X}_2, S_2^2)$ μέσες τιμές κ διακύμανση δυο τ.δ. από ανεξάρτητες $N(\mu_1, \sigma^2)$ κ $N(\mu_2, \sigma^2)$ τότε

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}, \quad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Απόδειξη

$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$, $\bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$

$\Rightarrow \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n_1-1} \\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n_2-1} \end{array}\right\} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} = \frac{(n_1+n_2-2)S_1^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n_1+n_2-2}$$

4) Έστω S_1^2 κ S_2^2 δειγμ. διακύμανσης δύο τυχαίων δειγμάτων μεγέθων n_1 κ n_2 από δύο αντίστ. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ κ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ τότε $\dfrac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$ γιατί $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim X^2_{n_1-1}$ κ $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim X^2_{n_2-1}$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{n_1-1}}{\dfrac{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}}{n_2-1}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2}} \sim F_{n_1-1, n_2-2}$$

Πχ (3.1)

τ. δείγμα. $n=25$ από $N(\mu, \sigma^2=625)$

(i) $P(|\bar{x}-\mu| \geq 4) = 1 - P(|\bar{x}-\mu| \leq 4) = 1 - P(-4 \leq \bar{x}-\mu \leq 4) =$

$= 1 - P\left(-\frac{4}{5} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} (=Z) \leq \frac{4}{5}\right) = 1 - P(-0,8 \leq Z \leq 0,8)$

$= 1 - 2 \cdot P(0 \leq Z \leq 0.8)$ το βρίσκουμε απ' τους πίνακες

(ii) $P(S^2 \geq 323) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{323*24}{625}\right) = P(X^2_{24} \geq 12,4)$ ....